LINEARE ALGEBRA

Gleichungssysteme
Teil 2

---

2 oder 3 Gleichungen
mit 2 Unbekannten

Datei Nr. 61 012

Stand 3. Juni 2015

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

(1) Behandlung dieser Themen in 6 ausführlichen Texten (mit vielen Trainingsaufgaben):

61011 Lineare Algebra Teil 1

1 Gleichung mit 2 oder 3 Unbekannten, 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten.
Zuerst wird hier das Rechnen mit Paaren und Tripeln behandelt, ferner Linearkombinationen von Zeilen- oder Spaltenvektoren.
Außerdem wird gezeigt, wie man die hier besprochenen Gleichungen mit den CAS-Rechnern CASIO ClassPad und TI Nspire lösen lässt (ab Seite 29).

61012 Lineare Algebra Teil 2 (Dieser Text)

2 oder 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten.
Als Lösungsverfahren wird die Additionsmethode verwendet, aber auch zweireihige Determinanten und die Cramersche Regel.

61013 Lineare Algebra Teil 3

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.
Als Lösungsverfahren die Determinantenmethode und die Cramersche Regel verwendet. Es wird auch gezeigt, wie man CAS-Rechner einsetzen kann.
Außerdem:**4 Gleichungen mit 3 Unbekannten.**

61014 Lineare Algebra Teil 4

Gleichungen mit 4 Unbekannten *(mit* vierreihigen Determinanten).

61015 Lineare Algebra Teil 5

Gleichungssysteme mit Parametern.
Speziell: ***Berechnungsmethoden mit CAS-Rechnern*** !

61016 Lineare Algebra Teil 6

Textaufgaben (meist Mischungsaufgaben), die auf lineare Gleichungssysteme führen.

(2) Der neue Text 61020 verzichtet ganz auf Determinanten und CAS-Rechner. Dort werden Gleichungssysteme durch Eliminationsverfahren gelöst.

61020 ***Trainingsheft für Schüler***. Kompakt und doch sehr ausführlich.
Die wichtigsten Arten von Gleichungssystemen werden nur mit Elimination gelöst.
Wer zwischendurch andere Verfahren sehen will, kann auf die oben genannten Texte zugreifen.

61051 Aufgabensammlung
Weitere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

(3) ***Die Lösung von Gleichungssystemen mit dem Gauß-Algorithmus*** (also mit Matrizen) wird in diesen Texten besprochen:

62011 3 oder 4 Gleichungen mit 3 oder 4 Unbekannten

62012 Gleichungssysteme mit Parametern

62041 Aufgabensammlung zum Gauß-Verfahren.

62112 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Inhalt

Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

1. Thema: 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

Ein solches Gleichungssystem hat diese Form:

$$\begin{Bmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{Bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{Bmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{Bmatrix}$$

Es gibt dazu mehrere Lösungsverfahren, die schon in der Mittelstufe besprochen werden.

1.1 Das Einsetzungsverfahren

Man löst eine Gleichung nach x oder nach auf und setzt dies in die andere Gleichung ein.

Beispiel 1

$$\begin{Bmatrix} 3x + y = 11 & (1) \\ 5x - 3y = -5 & (2) \end{Bmatrix}$$

Aus (1) folgt	$y = 11 - 3x$.	(3)
Eingesetzt in (2);	$5x - 3(11 - 3x) = -5$	
d.h.	$5x - 33 + 9x = -5$	
bzw.	$14x = 28$	
also	$x = 2$	
Eingesetzt in (3):	$y = 11 - 3 \cdot 2 = 11 - 6 = 5$.	
Lösungsmenge:	$L = \{(2\|5)\}$	

Beispiel 2

$$\begin{Bmatrix} x + 4y = 13 & (1) \\ 3x - 2y = -3 & (2) \end{Bmatrix}$$

Aus (1) folgt	$x = 13 - 4y$	(3)
Eingesetzt in (2):	$3(13 - 4y) - 2y = -3$	
	$39 - 12y - 2y = -3$	
	$14y = 42$	
	$y = 3$	
Eingesetzt in (3):	$x = 1$	
Lösungsmenge:	$L = \{(1\|3)\}$	

1.2 Das Additionsverfahren

(1) Grundlagen zur Theorie der Gleichungen mit 2 Unbekannten

Beispiel 1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 7 \qquad (1) \\ 5x_1 + 4x_2 &= -1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Eine Lösung besteht hier nicht nur aus einer Zahl, sondern aus einem Zahlenpaar, das beide Gleichungen zu einer wahren Aussage machen muss. Man legt der Aufgabe in der Regel die Menge aller reellen Zahlenpaare zugrunde. Dies schreibt man so: $G = R \times R$ oder $G = R^2$

Um herauszufinden, ob ein Zahlenpaar $(-3 \mid 8)$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, also zur Lösungsmenge gehört, muss man **die Probe machen**, also x_1 durch - 3 und x_2 durch 8 ersetzen:

Gleichung (1): -9 + 16 = 7 Dies ist eine wahre Aussage.
Gleichung (2): -15 + 32 = - 1 Dies ist eine falsche Aussage.

Da jedoch beide Gleichungen erfüllt sein müssen, ist $(-3 \mid 8)$ keine Lösung des Systems.

(2) Methode zur Bestimmung der Lösungsmenge

Solange eine Gleichung zwei Unbekannte enthält, kann man keine von ihnen berechnen. Daher wendet man z. B. das Additionsverfahren an mit dem Ziel, dass dabei eine Variable herausfällt.

Hier erreicht man das, wenn man die erste Gleichung mit - 2 multipliziert und dann dazu die Gleichung (2) addiert. Man sagt auch: Man subtrahiert die zweite Gleichung vom Doppelten der ersten:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 = 7 && (1) \\ & 5x_1 + 4x_2 = -1 && (2) \\ \hline (2) - 2\cdot(1) \quad & x_1 + \boxed{0x_2} = 15 && (3) \\ \text{Also weiß man:} \quad & x_1 = 15 && \\ \text{Dies wird in (1) eingesetzt:} \quad & 45 + 2x_2 = 7 && \mid -45 \\ & 2x_2 = -38 && \mid :2 \\ & x_2 = -19 && \end{aligned}$$

Das gesuchte Lösungspaar ist also: $\vec{x} = (15 \mid -19)$.

Man schreibt meistens $\vec{x}$ mit einem Vektorpfeil und nennt ihn einen Lösungsvektor.

Die Lösungsmenge besteht dann aus diesem einen Paar:

$$L = \{(15 \mid -19)\}$$

Beispiel 2

Im nächsten Beispiel verwenden wir x und y an Stelle von x_1 und x_2:

$$\boxed{\begin{aligned} 3x + 2y &= 18 \\ 2x - 5y &= -7 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

Um hier eine Variable zu eliminieren, muss man etwas mehr Aufwand betreiben.

1. Möglichkeit: Eliminieren von y

Gleichung (1) mal 5: $15x + \boxed{10y} = 90$ (3)

Gleichung (2) mal 2: $4x - \boxed{10y} = -14$ (4)

Durch diese Anpassung der Gleichungen hat man es geschafft, dass durch Addition

von (3) und (4) y wegfällt: $19x + \boxed{0y} = 76$ | :19

Also erhält man: $x = 4$.

Eingesetzt in (1): $12 + 2y = 18$ | -12

$2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

Lösungsvektor: $\vec{x} = (4\,|\,3)$

2. Möglichkeit: Eliminieren von x

Gleichung (1) mal 2: $\boxed{6x} + 4y = 36$ (3)

Gleichung (2) mal 3: $\boxed{6x} - 15y = -21$ (4)

Durch diese Anpassung der Gleichungen hat man es geschafft, dass durch Subtraktion

von (3) und (4) x wegfällt: $\boxed{0x} + 19y = 57$ | :19

$y = 3$

Eingesetzt in (1): $3x + 6 = 18$ | - 6

$3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

Lösungsvektor: $\vec{x} = (4\,|\,3)$

Man sieht also an diesem Beispiel, dass es in der Regel egal ist, welche Variable man eliminiert.
Es gibt allerdings Systeme, bei denen eine Variable günstiger ist als eine andere.

Beispiel 3

$$\boxed{\begin{aligned} 14x - 6y &= 8 \\ -21x + 9y &= 12 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

Vorschlag: Wir eliminieren y. Dazu bringen wie die beiden y-Koeffizienten auf 18 und rechnen:

$(1) \cdot 3:$ $\quad 42x - 18y = 24 \quad (3)$

$(2) \cdot 2:$ $\quad -42x + 18y = 24 \quad (4)$

(3) + (4): $\quad 0 = 48 \quad (5)$

Bevor wir dies auswerten, zeige ich, wie ungeschickt diese Berechnung war. Meiner Erfahrung nach bevorzugen Schüler die Multiplikation vor der Division. Denn hier hätte man sehen müssen, dass man (1) durch 2 und (2) durch 3 dividieren kann. Dann entstehen diese Gleichungen:

$$7x - 3y = 4 \quad (3')$$

$$-7x + 3y = 4 \quad (4')$$

Jetzt liefert (3') + (4'): $\quad 0 = 8 \quad (5')$

Auswertung:

Die Gleichungen (5) bzw. (5') stellen falsche Aussagen dar. Man formuliert dies so:
Es ist ein Widerspruch entstanden.

Aber: Ein Widerspruch wogegen???

Die Antwort ist verblüffend:

Ein Widerspruch gegen die Annahme, das System habe eine Lösung!

Also hat das Gleichungssystem keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also leer:

$$L = \{\ \}$$

MERKE: Immer wenn ein Gleichungssystem auf eine falsche Aussage führt, liegt ein Widerspruch zur Annahme vor, das System habe eine Lösung. Also folgt: $L = \{\ \}$

Beispiel 4

$$\begin{aligned} 14x - 6y &= 8 & (1) \\ -21x + 9y &= -12 & (2) \end{aligned}$$

Vorschlag: Wir eliminieren y. Dazu bringen wie die beiden y-Koeffizienten auf 3 und rechnen:

$(1):2:$ $\quad 7x - 3y = 4 \quad (3)$

$(2):3:$ $\quad -7x + 3y = -4 \quad (4)$

Entweder stellt man jetzt fest, dass Gleichung (4) das Negative (bzw. ein Vielfaches) von (3) ist und somit keine neue Bedingung mehr darstellt. Daher kann man sie weglassen und hat im Grunde nur noch eine Gleichung vorliegen, etwa (1).

Oder man rechnet überflüssigerweise noch so weiter:

(3) + (4): $\quad 0 = 0$

Diese Aussage ist unabhängig von der Wahl von x oder y, also kann man x beliebig wählen. Es gibt somit unendlich viele Lösungen.

Berechnung der Lösungsmenge:

Nach der Erkenntnis, dass eine Gleichung entbehrlich ist. also im Grunde nur noch eine Gleichung vorliegt, muss man wissen, dass man jetzt eine Variable frei wählen kann:

Wähle $\quad x = r,\ r \in \mathbb{R}$.

Aus (3) folgt dann: $\quad 7r - 3y = 4$

Umstellen nach y: $\quad -3y = 4 - 7r \quad |:(-3)$

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3}r$$

Lösungstripel: $\quad \left(r \mid -\frac{4}{3} + \frac{7}{3}r\right)$

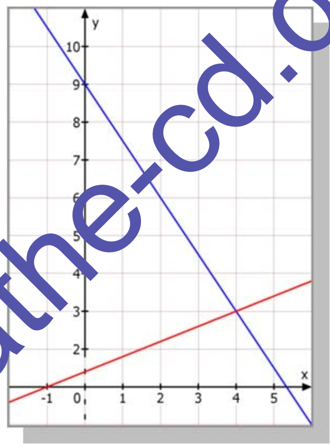
Lösungsmenge: $\quad L = \left\{\left(r \mid -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} \cdot r\right) \mid r \in \mathbb{R}\right\}$

MERKE: Wenn eine Gleichung eine Vielfaches der anderen ist, (dies erkennt man spätestens dann, wenn man auf $0 = 0$ kommt), dann gibt es unendlich viele Lösungen, die man durch die freie Wahl einer Variablen bildet.

Hinweis auf die geometrische Deutung dieser Lösungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Unbekannten kann man bekanntlich als Gerade darstellen. Man zeichnet sie meistens, nachdem man ihre Gleichung nach y umgestellt hat.

Liegen nun zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor, dann bedeutet dies im Grunde, dass man den Schnittpunkt dieser beiden Geraden berechnen soll.



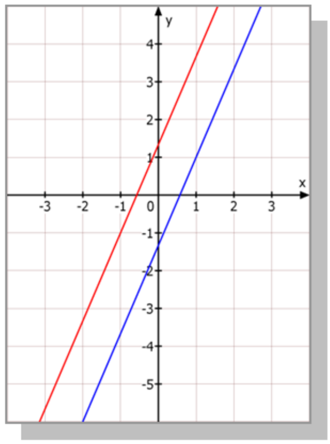
In Beispiel 2 lautete das Gleichungssystem:

$$3x + 2y = 18 \qquad (1)$$
$$2x - 5y = -7 \qquad (2)$$

Stellt man nach y um folgt:

$$y = -\tfrac{3}{2}x + 9 \qquad (1)$$
$$y = \tfrac{2}{5}x + \tfrac{7}{5} \qquad (2)$$

Das Lösungspaar war $(4\,|\,3)$. Die Abbildung stellt die beiden Lösungsmengen als Geraden dar und zeigt auch den Schnittpunkt also das Paar, das beide Gleichungen löst.



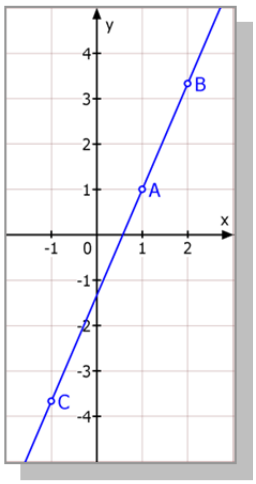
In Beispiel 3 lautete das Gleichungssystem:

$$14x - 6y = 8 \qquad (1)$$
$$-21x + 9y = 12 \qquad (2)$$

Stelle man nach y um folgt:

$$y = \tfrac{7}{3}x - \tfrac{4}{3} \qquad (1)$$
$$y = \tfrac{7}{3}x + \tfrac{4}{3}$$

Beide Geraden haben dieselbe Steigung, sind also parallel. Daher besitzen sie auch keinen Schnittpunkt. Das deckt sich mit dem Rechenergebnis, dass die Lösungsmenge (Schnittmenge) leer ist.



In Beispiel 4 war eine Gleichung ein Vielfaches der anderen. Daher stellen beide Gleichungen dieselbe Gerade dar. Daher liegt jeder Punkt der einen Geraden naturgemäß auch auf der anderen. Es gibt somit unendlich viele gemeinsame Punkte. Das deckt sich mit dem Gleichungsergebnis, wonach die Lösungsmenge aus unendlich vielen Zahlenpaaren besteht. Drei von ihnen habe ich ins Schaubild eingetragen.

1.3 Das Determinantenverfahren

(1) Was sind zweireihige Determinanten?

Unter einer zweireihigen Determinante versteht man ein quadratisches Schema mit 4 Zahlen:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2{,}73 \\ \sqrt{3} & \sqrt[5]{2} \end{vmatrix}$$

Das alles sind zweireihige Determinanten.

Weil man es so braucht, hat man eine **Berechnungsvorschrift** festgelegt, die so aussieht:

Merke: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

Oder so: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) - 2 \cdot 0 = -6$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-5) - 3 \cdot (-2) = 20 + 6 = 26$$

$$\begin{vmatrix} k & -2 \\ 3k & 6 \end{vmatrix} = k \cdot 6 - 3k \cdot (-2) = 6k + 6k = 12k$$

$$\begin{vmatrix} 2k & 3 \\ -6 & k \end{vmatrix} = 2k \cdot k - (-6) \cdot 3 = 2k^2 + 18$$

Mit diesen Determinanten kann man rasch Lösungspaare von Gleichungssystemen berechnen, wenn eine eindeutige Lösung existiert.

Dies wird auf der nächsten Seite besprochen.

Aufgabe: Berechne die ganz oben auf dieser Seite stehenden Determinanten.

Die Lösung steht auf der nächsten Seite,